КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Т. XXIII 1985 Вып. 3

УДК 629.76.015

В. С. Асланов, В. В. Бойко

НЕЛИНЕЙНОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ДВИЖЕНИЕ АСИММЕТРИЧНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В АТМОСФЕРЕ

Рассматриваются в нелинейной постановке резонансные режимы пространственного движения асимметричного КА при спуске в атмосфере. Предполагается, что угловая скорость собственного вращения КА в среднем на периоде колебания угла атаки не обращается в нуль. Исходная система уравнений движения КА приведена к системе с двумя вращающимися фазами. В резонансном случае получена осредненная система уравнений движения. Для произвольных пространственных углов атаки $\alpha \in (0, \pi)$ найдено условие возникновения главного резонанса, показано, что из него вытекают известные резонансные соотношения, полученные для малых углов атаки. Записаны условия существования устойчивого резонанса, изучено поведение КА в резонансной области, а также определены условия захвата КА в резонансный режим. На примере асимметрии КА, обусловленной смещением центра масс с геометрической оси симметрии, показана возможность проведения аналитического исследования движения КА в резонансной области.

Малая инерционно-аэродинамическая асимметрия вызывает возникновение резонансных явлений, которые существенно изменяют характер движения КА вокруг центра масс при спуске в атмосфере. Выполнить полный нелинейный анализ движения КА с асимметрией из-за сложности уравнений движения не представляется возможным, поэтому используют, как правило, те или иные упрощения задачи. Общепринятыми являются два подхода: линеаризация уравнений движения [1, 2] и рассмотрение квазистатических режимов, в которых полагают, что КА в своем движении вокруг центра масс совершает только «медленное» движение [1].

Настоящая статья посвящена нелинейному анализу движения асимметричных КА в резонансной области. Ограничения на компоненты угловой скорости и величину пространственного угла атаки не накладываются. Из рассмотрения исключается случай колебательного движения КА по углу собственного вращения φ.

1. Полные уравнения движения КА с малой асимметрией имеют вид [1, 3]:

$$\begin{gathered}\ddot{\alpha}+F(\alpha,z)=\varepsilon\Phi_\alpha(\alpha,\varphi,z),\\ \dot{\varphi}=R/\bar{I}_x-(G-R\cos\alpha)\cos\alpha/\sin^2\alpha=\Phi_\varphi(\alpha,z),\\ \dot{z}=\varepsilon\Phi_z(\alpha,\varphi,z),\end{gathered}\tag{1}$$

$$F(\alpha,z)=(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)/\sin^3\alpha-M_\alpha(\alpha,z)/I_y.$$

Здесь α — пространственный угол атаки, φ — угол собственного вращения; $R=\bar{I}_x\omega_x$, $G=R\cos\alpha+(\omega_y\sin\varphi+\omega_z\cos\varphi)\sin\alpha$ — с точностью до множителя проекции вектора кинетического момента на геометрическую ось симметрии КА и вектор скорости V; $M_\alpha(\alpha,z)=m(\alpha)qSL$ — восстанавливающий аэродинамический момент; $z=\{R, G, V, \theta, h,\ldots\}$ — вектор медленно меняющихся функций; θ, h — соответственно угол наклона траектории и высота полета; q — скоростной напор, S — площадь миделевого сечения, L — характерный размер КА; $\bar{I}_x=I_x/I_y$; I_x, I_y, I_z — центральные моменты инерции; ε — малый параметр.

Функции $\Phi_\alpha(\alpha, \varphi, z)$, $\Phi_z(\alpha, \varphi, z)$ определяются соотношениями, приведенными в [3]. Отметим одну их особенность — они являются периодическими функциями переменной φ периода 2π.

Малую инерционно-аэродинамическую асимметрию будем определять: безразмерной разностью поперечных моментов инерции, безразмерными центробежными моментами инерции, смещением центра масс КА от геометрической оси симметрии и малым возмущающим аэродинамическим моментом [3].

Уравнения (1) описывают квазиконсервативное движение колебательной системы. При $\varepsilon=0$ система (1) сводится к одному уравнению невозмущенного движения вида

$$\ddot{\alpha}+F(\alpha)=0. \tag{2}$$

Это уравнение имеет периодические решения, причем на одном периоде колебания имеется один максимум $\alpha=\alpha_1$ и один минимум $\alpha=\alpha_2$.

Введем в рассмотрение новую переменную — фазу колебания угла атаки

$$y=\omega(t-t_0),$$

где t_0 — произвольная постоянная.

Множитель ω выбран таким образом, чтобы общее решение уравнения (2) было периодической функцией переменной y периода 2π.

В соответствии с процедурой, предложенной в [4], заменим первое уравнение второго порядка в исходной системе (1) на два дифференциальных уравнения для амплитуды и фазы колебания:

$$\begin{gathered}
\dot{\alpha}_1=\frac{\varepsilon}{F(\alpha_1,z)}\left[\Phi_\alpha\dot{\alpha}-\Phi_z\left(\frac{\partial W(\alpha_1,z)}{\partial z}-\frac{\partial W(\alpha,z)}{\partial z}\right)\right]=\varepsilon\Phi_{\alpha_1}(y,\varphi,\alpha_1,z),\\
\dot{z}=\varepsilon\Phi_z(y,\ \varphi,\ \alpha_1,\ z),\\
\dot{y}=\omega(\alpha_1,z)-\varepsilon 2\pi\,\mathrm{sign}(\dot{\alpha})\,\Phi_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha_1}\frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|}\right)=\omega(\alpha_1,z)+\varepsilon Y(y,\varphi,\alpha_1,z),\\
\dot{\varphi}=\Phi_\varphi(y,\ \alpha_1,\ z).
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $W(\alpha,z)=\int F(\alpha,z)\,d\alpha$, $\dot{\alpha}=\pm\sqrt{2(W(\alpha_1,z)-W(\alpha,z))}$, $T=2\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}d\alpha/|\dot{\alpha}|$.

Правые части уравнений (3) являются периодическими функциями «быстрых» переменных y и φ с одинаковым периодом 2π, эти функции зависят также от вектора медленных переменных $z=\{\alpha_1, R, G, V, \theta, h, \ldots\}$.

Переменная y представляет собой быстро вращающуюся фазу [4]. Будем рассматривать случай движения, когда угол собственного вращения φ тоже является быстро вращающейся фазой. Уравнение для угла собственного вращения физически не содержит малого параметра и относится к классу уравнений, рассмотренных в [5]. Приведем его к виду

$$\dot{\varphi}=\lambda(z)+\varepsilon L(y,\ z), \tag{4}$$

где $\lambda(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_\varphi(y,z)\,dy$, $\quad \varepsilon L(y,z)=\Phi_\varphi(y,z)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_\varphi(y,z)\,dy$.

С учетом соотношения (4) система уравнений (3) может быть сведена к системе с двумя вращающимися фазами

$$\dot{z}-\varepsilon\Phi_z(y,\ \varphi,\ z),$$

$$\dot{y}=\omega(z)+\varepsilon Y(y, \varphi, z), \quad \dot{\varphi}=\lambda(z)+\varepsilon L(y, z), \tag{5}$$

где $z=\{\alpha_1, R, G, q, \ldots\}$.

2. Условие главного резонанса для системы (5) имеет вид

$$\omega(z)=\lambda(z). \tag{6}$$

Найдем соответствующие выражения для правой и левой частей этого условия и покажем, что из него вытекают известные резонансные соотношения для малых углов атаки.

Рассмотрим КА, для которого $M_\alpha(\alpha)\sim\sin\alpha$ и запишем решение уравнения невозмущенного движения в виде [3]

$$\cos\alpha=A\,\mathrm{cn}^2\left[K\left(\frac{2y}{\pi}+1\right), k\right]+x, \tag{7}$$

где $\mathrm{cn}\,u$ — эллиптический косинус; $y=\omega(t-t_0)$, $\omega=\pi\beta/2K$, $\beta=\sqrt{\eta g}$, $k=\sqrt{A/2\eta}$, $x=\cos\alpha_1$, $g=-M_\alpha{}^\alpha/I_y$; $K(k)$ — полный эллиптический интеграл I рода, $M_\alpha{}^\alpha=\partial M_\alpha/\partial\alpha|_{\alpha=0}$,

$$\eta=\sqrt{1-2(ax-b)/(1-x^2)+[(a-bx)/(1-x^2)]^2},$$

$$A=\eta-x-(a-bx)/(1-x^2), \quad a=(R^2+G^2)/4g, \quad b=RG/2g.$$

Среднюю частоту вращения $\lambda(z)$ угла φ можно получить, подставив решение (7) во второе уравнение системы (1) и взяв квадратуру. В результате условие главного резонанса (6) примет вид

$$\frac{\pi\beta}{2K}=R\left(\frac{I_y-I_x}{I_x}\right)+\frac{1}{2KA}[(R-G)n_1\Pi_1-(R+G)n_2\Pi_2], \tag{8}$$

где $\Pi_1=\Pi(k, n_1)$, $\Pi_2=\Pi(k, n_2)$ — полные эллиптические интегралы III рода; $n_1=A/(1-x-A)$, $n_2=-A/(1+x+A)$.

Для малых углов атаки выражение для левой и правой частей соотношения (8) запишем следующим образом:

$$\omega\approx2\sqrt{R^2/4-M_\alpha{}^\alpha/I_y}, \tag{9}$$

$$\lambda\approx R(1/\bar{I}_x-{}^1/_2)+\mathrm{sign}(R-G)\sqrt{R^2/4-M_\alpha{}^\alpha/I_y}. \tag{10}$$

При $\mathrm{sign}(R-G)=+1$ имеем условие резонанса по крену [6]

$$\omega_x{}^*\approx\sqrt{-M_\alpha{}^\alpha/(I_y-I_x)}, \tag{11}$$

а при $\mathrm{sign}(R-G)=-1$ получим условие так называемого субгармонического резонанса [7]

$$\omega_x{}^*\approx3\sqrt{-M_\alpha{}^\alpha/(1-2\bar{I}_x)(I_x+I_y)}. \tag{12}$$

Численные расчеты, проведенные по формулам (8), (11), (12), подтверждают справедливость выполненных преобразований.

3. В нерезонансном случае осреднение системы (5) можно проводить независимо по обеим «быстрым» переменным [4], и в первом приближении малая асимметрия не будет оказывать влияние на движение КА вокруг центра масс.

В околорезонансной области

$$\omega(z)-\lambda(z)=O(\varepsilon), \tag{13}$$

для построения осредненных уравнений сделаем в системе (5) замену переменных $\varphi=y-x$, а затем проведем осреднение по единственной быстрой переменной y

$$\dot{\varkappa}=\Delta\omega(z)+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}Y(y,\varkappa,z)\,dy=$$

$$=\Delta\omega(z)+\varepsilon\bar{Y}(\varkappa,z),\qquad \dot{z}=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_z(y,\varkappa,z)\,dy=\varepsilon\bar{\Phi}_z(\varkappa,z),\tag{14}$$

где $\Delta\omega(z)=\omega(z)-\lambda(z)$ — резонансная расстройка.

В силу исходных уравнений правые части полученной системы являются периодическими функциями переменной $\varkappa$ периода 2π.

Заметим, что система (14) справедлива как для резонансного случая, так и для нерезонансного, отличие заключается лишь в том, что сдвиг фаз $\varkappa=y-\varphi$ в первом случае — «медленная» переменная, а во втором — «быстрая».

Опустим в первом уравнении системы (14) член первого порядка малости (см. [1]). Его влияние будет учтено при анализе устойчивости резонансного режима. В результате получим

$$\dot{\varkappa}=\Delta\omega(z),\qquad \dot{z}=\varepsilon\bar{\Phi}_z(\varkappa,z).\tag{15}$$

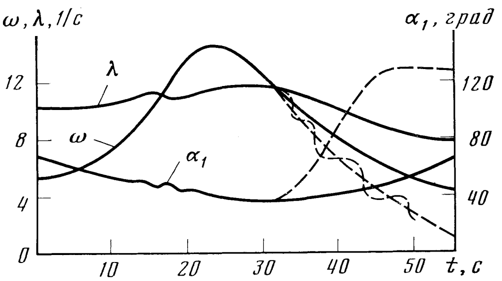

Рис. 1. Два типа резонансных случаев: сплошная линия – α_1, ω, λ – «проход» через резонанс; штриховая – α_1, ω, λ – захват в резонанс

Различают два типа поведения КА в околорезонансной области: «проход» через резонанс, когда резонансное соотношение (13) выполняется кратковременно, и захват в резонанс, при котором резонансный режим существует в течение длительного промежутка времени $\Delta t=O(1/\varepsilon)$ (рис. 1). Траектории, представленные на рис. 1, соответствуют движению гипотетического КА с параметрами:

$$c_{yv}=0,\quad \sigma_x=c_xS/2m=0{,}001\ \text{м}^2/\text{кг};\quad \bar{x}_T=0{,}02,\quad \bar{y}_T=0,\quad \bar{z}_T=0{,}0005,\quad I_x/I=0{,}6,$$
$$I=I_y=I_z=10\ \text{кг}\cdot\text{м}^2,\quad I_{xy}=I_{xz}=I_{yz}=0,\quad m_{x_n}^{\bar{\omega}_x}=m_{y_n}^{\bar{\omega}_y}=m_{x_n}^{\bar{\omega}_z}=0,\tag{16}$$

при следующих начальных условиях:

$$\alpha_0=60^\circ,\quad \dot{\alpha}_0=0,\quad R_0=6\ \text{с}^{-1},\quad G_0=3\ \text{с}^{-1},$$
$$V_0=7000\ \text{м/с},\quad \theta_0=-7{,}5^\circ,\quad h_0=60\ \text{км}.\tag{17}$$

Здесь обозначения совпадают с принятыми в [1, 3]. Траектории различаются лишь начальными значениями угла собственного вращения ($\varphi_0=0^\circ$, 135°), что соответствует, естественно, и различным значениям сдвига фаз $\varkappa=y-\varphi$ в момент выполнения резонансного соотношения (13). На восходящей ветви кривой скоростного напора ($\dot{q}>0$) осуществляется «проход» через резонанс обеих траекторий, на нисходящей ветви скоростного напора ($\dot{q}<0$) имеем при $\varphi_0=0^\circ$ — «проход», а при $\varphi_0=135^\circ$ — захват в резонанс. Захват в резонанс в данном случае приводит к значительному увеличению угла атаки в конце траектории.

При захвате в резонанс расстройка $\Delta\omega(z)$ квазипериодически изменяется во времени. Этому случаю будут соответствовать периодические решения уравнения невозмущенного движения системы (15). Для отыскания таких решений воспользуемся методом фазовой плоскости [8]. Про-

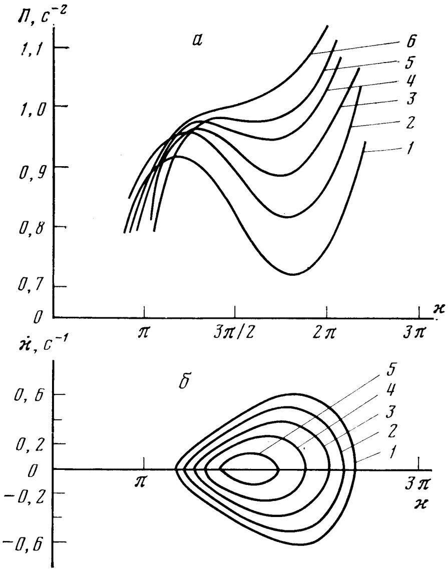

Рис. 2

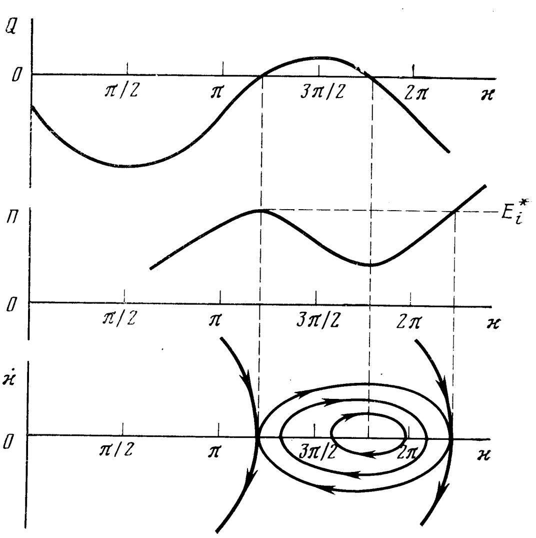

Рис. 3

Рис. 2. Фазовые траектории

Рис. 3. Влияние аэродинамического демпфирования $(m^{\omega}=m_y^{\bar\omega_y}=m_z^{\bar\omega_z})$ на условия «захвата» КА в резонансный режим

а: *1* – 0,0; *2* – –0,010; *3* – –0,020; *4* – –0,030; *5* – –0,035; *6* – –0,040; *б*: *1* – 0,0; *2* – –0,10; *3* – –0,020; *4* – –0,030; *5* – –0,035, m^{ω}

дифференцируем первое уравнение системы (15) по времени

$$\ddot{\varkappa}=Q(\varkappa, z), \quad \dot{z}=\varepsilon\Phi_z(\varkappa, z),$$

где $Q(\varkappa, z)=\dfrac{d}{dt}(\Delta\omega(z))=\dfrac{\partial}{\partial z}(\Delta\omega(z))\Phi_z(\varkappa, z)$ — периодическая функция переменной $\varkappa$ периода 2π.

Запишем для полученной системы порождающее уравнение

$$\ddot{\varkappa}=Q(\varkappa), \tag{18}$$

и соответствующий интеграл энергии

$$\frac{\dot{\varkappa}^2}{2}+\Pi(\varkappa)=E,$$

где

$$\Pi(\varkappa)=-\int Q(\varkappa)\,d\varkappa.$$

Для определенности будем полагать, что система (18) имеет два положения равновесия (две стационарные точки) $\varkappa_i^*$, $\varkappa_j^*$, которые являются корнями уравнения

$$Q(\varkappa^*)=0. \tag{19}$$

В силу периодичности функции $Q(\varkappa)$ число корней всегда четное.

В точке $\varkappa=\varkappa_i^*$ имеем неустойчивое положение равновесия (рис. 2)

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \varkappa}\right|_{\varkappa=\varkappa_i^*}>0,$$

а в точке $\varkappa=\varkappa_j^*$ — устойчивое

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial \varkappa}\right|_{\varkappa=\varkappa_j^*} < 0. \tag{20}$$

Критическое значение полной энергии $E=E_i^*$ определяет фазовую траекторию, являющуюся сепаратрисой.

Следовательно, захват в резонанс имеет место, если при выполнении резонансного соотношения (6) сдвиг фаз $\varkappa$ принадлежит интервалу $(\varkappa_i^*, \varkappa_i)$. Правая граница указанного интервала определяется из уравнения

$$\Pi(\varkappa_i)-E_i^*=0.$$

Процедура нахождения условий захвата в резонанс заключается в следующем. В момент выполнения условия (6) определяются действительные корни уравнения (19), которые будут существовать, если

$$\max_{\varkappa} Q(\varkappa, z) \min_{\varkappa} Q(\varkappa, z) \leqslant 0. \tag{21}$$

В соответствии с неравенством (20) выделяются точки устойчивого положения равновесия $\varkappa=\varkappa_j^*$ и интервалы сдвига фаз $(\varkappa_i^*, \varkappa_i)$, в которых реализуются периодические решения уравнения (18), а значит, и захват в резонанс.

Вопрос о том, насколько точно интервал сдвига фаз $(\varkappa_i^*, \varkappa_i)$ определяет область захвата устойчивой особой точкой $\varkappa_j^*$, связан с вопросом о точности полученных выше осредненных соотношений, при выводе которых были опущены члены порядка $O(\varepsilon^2)$ и выше.

Неравенство (21) можно трактовать как некоторую область $D(\xi+\delta\xi, z_0)$ параметров КА (как номинальных ξ, так и малых отклонений $\delta\xi$) и начальных условий движения z_0, при которых может существовать длительный резонансный режим.

4. Приведем пример использования полученных соотношений. Рассмотрим движение гипотетического КА, у которого подъемная сила отсутствует, нормальная и тангенциальная аэродинамические силы пропорциональны соответственно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; малая асимметрия определяется смещением центра масс с геометрической оси симметрии КА $(\bar{z}_T=z_T/L\neq\neq0)$. Будем полагать, что малый демпфирующий момент имеет составляющие только в плоскости пространственного угла атаки и в плоскости, ей перпендикулярной $(m_{y_n}^{\bar{\omega}_y}, m_{z_n}^{\bar{\omega}_z}\neq0)$ (см. [1]). В этом случае правые части системы (1) запишутся в виде ([3])

$$\Phi_\alpha=A_\alpha\cos\alpha\cos\varphi-\delta_\alpha\dot{\alpha}, \quad \Phi_R=A_R\sin\alpha\sin\varphi, \quad \Phi_G=\delta_G(R\cos\alpha-G),$$

где $A_\alpha\approx\bar{z}_TqSL/I$, $A_R\approx-\bar{z}_TqSL/I$, $\delta_\alpha=-m_{z_n}^{\bar{\omega}_z}qSL^2/VI$, $\delta_G=-m_{y_n}^{\bar{\omega}_y}qSL^2/VI$. Для малых значений модуля эллиптических функций k решение (7) существенно упрощается:

$$\cos\alpha\approx a+b\cos y,$$

где $a=(x+f)/2$, $b=-(f-x)/2$, $x=\cos\alpha_1$, $f=\cos\alpha_2$, $y=\omega t$. Частоты колебаний ω и λ определяются формулами

$$\omega\approx2\sqrt{-M_\alpha{}^\alpha/I}, \quad \lambda\approx R(1/\bar{I}_x-0{,}5)+\sqrt{-M_\alpha{}^\alpha/I}. \tag{22}$$

Если решение порождающего уравнения известно, то произвести замену первого уравнения исходной системы (1) на два уравнения для амплитуды $x=\cos\alpha_1$ и фазы $y=\omega t$ удобнее с помощью метода вариации произвольных постоянных (схема Ван дер Поля [8]):

$$\dot{x}=-\frac{\varepsilon}{\Delta}(\Phi_\alpha\alpha_y+\xi_1), \qquad \dot{y}=\omega+\frac{\varepsilon}{\Delta}(\Phi_\alpha\alpha_x+\xi_2).$$

Здесь $\Delta=(\alpha_x\alpha_{yy}-\alpha_y\alpha_{xy})\omega-\omega_x\alpha_y^2$, $\xi_1=[(\alpha_z\alpha_{yy}-\alpha_{yz}\alpha_y)\omega-\omega_z\alpha_y^2]\Phi_z$, $\xi_2=[(\alpha_z\alpha_{xy}-\alpha_x\alpha_{yz})\omega+\omega_x\alpha_z-\omega_z\alpha_x]\Phi_z$; нижний индекс означает операцию дифференцирования по указанной переменной (за исключением Φ_α и Φ_z).

Осредненную систему (14) запишем в виде

$$\dot{\varkappa}=\Delta\omega+B_y\cos\varkappa,\quad \dot{x}=A_x+B_x\sin\varkappa,$$
$$\dot{R}=B_R\sin\varkappa,\quad \dot{G}=A_G.$$

Здесь

$$A_x=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{4F(x)}\,\omega^2(x-a)\,\frac{\dot{q}}{q}-\frac{\delta_\alpha b^2}{2F(x)}\left[\frac{1}{1-a+\sqrt{(1-a)^2-b^2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1+a+\sqrt{(1+a)^2-b^2}}\right],\qquad A_G=\delta_G(Ra-G),$$

$$B_x=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{F(x)}\left\{A_R\left[(aG-R)I_1+\frac{R-G_x}{1-x^2}H+bGI_2\right]+\right.$$
$$\left.+A_\alpha b\omega\left[a(I_0-I_2)+b(I_1-I_3)\right]\right\},$$

$$B_R=\bar{z}_TqSLH/I,\qquad B_y=\frac{\omega\sqrt{1-x^2}}{F(x)}\left\{A_\alpha[aa_xI_1+(a_xb+ab_x)I_2+bb_xI_3]+\right.$$
$$\left.+A_R\frac{\omega f_R}{2}(I_0-I_2)\right\},$$

$$a_x=\frac{\partial a}{\partial x},\qquad b_x=\frac{\partial b}{\partial x},\qquad f_R=\frac{\partial f}{\partial R},$$

$$H=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos y\sqrt{1-(a+b\cos y)^2}\,dy,\qquad I_i=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos^i y\,dy}{\sqrt{1-(a+b\cos y)^2}}\quad (i=\overline{0,3}).$$

Функция Q, как следует из (22), зависит от медленных переменных q и R:

$$Q(\varkappa,\ q,\ R)=Q_0+Q_1\sin\varkappa,$$

где $Q_0=\dfrac{\omega}{4q}\dot{q}$, $\quad Q_1=-\bar{z}_T\dfrac{qSL(2-\bar{I}_x)}{2\bar{I}_x}H$. Стационарные точки $\varkappa_i^*$, $\varkappa_j^*$ определяются формулой

$$\varkappa_{i,j}^*=\mathrm{Arcsin}(-Q_0/Q_1)=\mathrm{Arcsin}\left(\frac{\omega\bar{I}_x\dot{q}}{2q^2SLH(2-\bar{I}_x)\bar{z}_T}\right).$$

Критическое значение полной энергии E_i^* равно (рис. 2)

$$E_i^*=\Pi(\varkappa_i^*),$$

где $\Pi(\varkappa)=-Q_0\varkappa+Q_1\cos\varkappa$.

Условие существования стационарных точек (21) в данном случае (угол собственного вращения φ — «быстрая» фаза, $\varphi\sim O(1)$) запишется в виде $Q_0^2-Q_1^2\leqslant 0$ или

$$\frac{(2-\bar{I}_x)}{\bar{I}_x}\,|\bar{z}_T|\,qSLH\geqslant\sqrt{-\frac{M_\alpha^\alpha}{I}}\,\frac{|\dot{q}|}{q}. \tag{23}$$

Отсюда получим выражение для критического значения асимметрии

$$\bar{z}_{T_{\text{кр}}}=\sqrt{-M_\alpha^\alpha/I}\,|\dot{q}|\,\bar{I}_x/(2-\bar{I}_x)q^2SLH.$$

Условие захвата (23) имеет структурное сходство с соотношением, полученным В. А. Ярошевским для случая, когда угол собственного вращения — «медленная» фаза ($\varphi\sim O(\varepsilon)$) (см. [1], формула (23.15)). Условие, подобное (23), получено также и в работе А. А. Шилова и М. Г. Гомана [2] в предположении, что начальный угол атаки равен нулю и «быстрое» движение не возбуждено.

Для гипотетического КА с параметрами (16) и начальными условиями (17) исследовалось влияние аэродинамического демпфирования ($m^{\omega}=m_{y_n}^{\bar{\omega}_y}=m_{z_n}^{\bar{\omega}_z}$) на область захвата устойчивой особой точкой $\varkappa_j^*$. Результаты расчетов показывают (рис. 3), что с увеличением аэродинамического демпфирования m^{ω} интервал захвата ($\varkappa_i^*$, $\varkappa_i$) сужается, следовательно, вероятность захвата КА в устойчивый резонанс (6) уменьшается. При $m^{\omega}=-0{,}04$ захват вообще отсутствует и условие существования устойчивого резонанса (21) не выполняется.

Следует отметить, что подобный анализ можно провести для любой асимметрии, а также для любых ее сочетаний. Однако при построении осредненных уравнений желательно иметь точное или приближенное решение уравнения невозмущенного движения. Для КА сферической формы или близкой к ней можно использовать точное решение (7) и приближенные, полученные на его основе. Для КА, имеющих помимо балансировочных положений $\alpha=0$, π и другие балансировочные положения, моментная характеристика может быть задана в виде $m_{\alpha}(\alpha)=a_1\sin\alpha+ +a_2\sin 2\alpha$. Тогда в качестве порождающего решения можно использовать следующее:

$$\cos\alpha=\frac{\beta_1(z)+\beta_2(z)\,\mathrm{sn}^2[\omega(t-t_0),k]}{\beta_3(z)+\beta_4(z)\,\mathrm{sn}^2[\omega(t-t_0),k]},$$

где $\mathrm{sn}\,u$ — эллиптический синус, k — модуль эллиптической функции; $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$, $\beta_3(z)$, $\beta_4(z)$ — произвольные функции.

Если решение уравнения невозмущенного движения найти не представляется возможным, исследование нелинейных резонансных режимов по изложенной методике может быть проведено численно.

Авторы выражают благодарность А. А. Шилову за полезное обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.
2. *Шилов А. А., Гоман М. Г.* Резонансные режимы пространственного неуправляемого движения аппаратов на участке входа в атмосферу.– Тр. ЦАГИ, вып. 1624, 1975.
3. *Асланов В. С.* Определение амплитуды пространственных колебаний баллистического аппарата с малой асимметрией при спуске в атмосфере.– Космич. исслед., т. 18, № 2, с. 178.
4. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971.
5. *Блехман И. И.* Метод малого параметра.– В кн. Механика в СССР за 50 лет. Т. 1. М.: Наука, 1968.
6. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика пространственного движения самолета. М.: Машиностроение, 1967.
7. *Нейфех А., Сэрик В.* Исследование асимметричных вращающихся тел с нелинейными аэродинамическими характеристиками.– Ракетная техника и космонавтика, 1972, т. 10, № 8, с. 38.
8. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию
14.VII.1983 г.