КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Т. XXVI 1988 Вып. 2

УДК 533.6

В. С. Асланов

ДВА ВИДА НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСНОГО ДВИЖЕНИЯ АСИММЕТРИЧНОГО КА В АТМОСФЕРЕ

В нелинейной постановке рассматривается движение вокруг центра масс КА с малой асимметрией при спуске в атмосфере. Выделено два возможных вида резонансного движения: резонанс крена и вращательный резонанс [1]. Выписаны усредненные уравнения, найдены необходимые и достаточные условия существования устойчивого резонанса. Получены соотношения для критических параметров асимметрии, при которых происходит захват в резонанс.

Неточность изготовления КА, малая несимметрия формы, вызванная конструктивными особенностями, и обгар теплозащитного покрытия приводят к появлению малой инерционно-аэродинамической асимметрии. Движение КА вокруг центра масс в этом случае можно описать с помощью пространственного угла атаки (нутации) α и угла собственного вращения φ. Частоты колебания (или вращения) этих углов при спуске изменяются медленно и возможные резонансы, особенно устойчивые, могут привести к существенному искажению характера движения. Линейному анализу резонансных режимов посвящены работы В. А. Ярошевского, А. А. Шилова, М. Г. Гомана и др. В нелинейной постановке при исследовании резонанса использовался квазистатический подход [2] в предположении, что нутационные колебания не возбуждены и угол атаки меняется медленно.

1. Уравнения движения КА с малой асимметрией имеют вид [2, 3]

$$\begin{gathered}\ddot{\alpha}+F(\alpha, z)=\varepsilon\Phi_\alpha(\alpha, \varphi, z), \quad \dot{\varphi}=R/\bar{J}_x-(G-R\cos\alpha)\cos\alpha/\sin^2\alpha=\Phi_\varphi(\alpha, z),\\ \dot{\psi}=(G-R\cos\alpha)/\sin^2\alpha=\Phi_\psi(\alpha, z), \quad \dot{z}=\varepsilon\Phi_z(\alpha, \varphi, z), \qquad (1)\\ F(\alpha, z)=(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)/\sin^3\alpha-M_\alpha(\alpha, z),\end{gathered}$$

где ψ — угол прецессии; R, G — с точностью до множителя проекции кинетического момента на ось вращения КА и вектор скорости V, $M_\alpha(\alpha, z)$ — восстанавливающий момент, $z=\{R, G, q\ldots\}$ — вектор медленно меняющихся параметров, ε — малый параметр; $q=\rho V^2/2$ — скоростной напор, $\bar{J}_x=J_x/J_y$, J_x, J_y — поперечный и продольные моменты инерции, Φ_z — периодические функции α и φ.

Пусть имеет место малая асимметрия КА: $\Delta_i=(J_z-J_y)/J_y$ — безразмерная разность поперечных моментов инерции, $\bar{J}_{xy}=J_{xy}/J_y$, $\bar{J}_{xz}=J_{xz}/J_y$ — безразмерные центробежные моменты инерции, $(y_т^2+z_т^2)^{1/2}$ — относительное смещение центра масс КА от оси симметрии, $m_{x0}+m_x^\beta\sin\alpha\cos\varphi$, m_{y0}, m_{z0} — безразмерные компоненты малого возмущающего аэродинамического момента. Вектор асимметрии равен

$$\xi=\{\Delta_i, \bar{J}_{xy}, J_{xz}, \bar{y}_т, \bar{z}_т, m_x^\beta, m_{x0}, m_{y0}, m_{z0}\}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) не зависят от угла прецессии ψ, поэтому кинематическое уравнение для угла прецессии рассматривать не будем. С помощью известной процедуры (см., например, [4]) заменим первое уравнение системы (1) на два уравнения первого порядка для амплитуды x и фазы $y=\omega(t-t_0)$. Множитель ω выберем так, чтобы общее решение системы (1) при невозмущенном движении ($\varepsilon=0$) было 2π-периодической функцией y. В результате получим

$$\dot{x}=-\frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{F(x)}\left[\Phi_\alpha\dot{\alpha}-\left(\frac{\partial W(\alpha_{\max})}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial z}\right)\Phi_z\right]=\varepsilon\Phi_x(y,\varphi,x,z),$$

$$\dot{z}=\varepsilon\Phi_z(y,\varphi,x,z),\ \dot{y}=\omega(x,z)+\varepsilon Y(y,\varphi,x,z),\ \dot{\varphi}=\Phi_\varphi(y,x,z), \tag{3}$$

где
$$\varepsilon Y(y,\varphi,x,z)=2\pi\operatorname{sign}\dot{\alpha}\Phi_z\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha_{\max}}\frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|}\right)\right],$$

$$W(\alpha)=\int F(\alpha)\,d\alpha,\qquad \dot{\alpha}=\pm\sqrt{2[W(\alpha_{\max})-W]},\qquad T=2\int\limits_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}}\frac{d\alpha}{|\dot{\alpha}|}$$

— период колебания угла атаки, $\alpha_{\min}$, $\alpha_{\max}$ — минимальный и максимальный углы атаки.

Правые части уравнений (3) — периодические функции переменных y и φ, которые в силу уравнений (1) (см. [3]) по переменной φ имеют период 2π и для асимметрии вида (2) определяются соотношениями:

$$\begin{gathered}\Phi_x=K_0^x+L_0^x+(K_1^x+L_1^x)\sin\varphi+(K_2^x+L_2^x)\cos\varphi+K_3^x\sin 2\varphi+L_3^x\cos 2\varphi,\\ \Phi_R=K_0^R+(K_1^R+L_1^R)\sin\varphi+(K_2^R+L_2^R)\cos\varphi+K_3^R\sin 2\varphi+L_3^R\cos 2\varphi,\\ \Phi_G=K_0^G+L_0^G+(K_1^G+L_1^G)\sin\varphi+(K_2^G+L_2^G)\cos\varphi+K_3^G\sin 2\varphi+L_3^G\cos 2\varphi,\\ \Phi_q=K_0^q,\end{gathered} \tag{4}$$

где $K_i^z(y)$, $L_i^z(y)$ — соответственно четные и нечетные 2π-периодические функции y ($i=0, 1, 2, 3$; $z=x, R, G, q$).

Две быстрые переменные в правых частях системы (3) приводят к возможности появления нелинейных резонансов. Если в уравнении для изменения фазы y явным образом содержится частота $\omega(z)$, то для фазы φ можно говорить лишь о средней частоте

$$\bar{\dot{\varphi}}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi_\varphi(\alpha(y))\,dy. \tag{5}$$

Характер изменения угла собственного вращения может быть колебательным или вращательным. В первом случае аппарат колеблется относительно плоскости угла атаки

$$\bar{\dot{\varphi}}=O(\varepsilon), \tag{6}$$

а во втором непрерывно поворачивается в одном направлении

$$\bar{\dot{\varphi}}=O(1). \tag{7}$$

Будем рассматривать класс вращательных движений, близких к равномерному вращению и имеющих также колебательный характер. Пусть максимальное отклонение от равномерного вращения имеет порядок малости ε. Тогда, объединяя оба случая (6) и (7), можно уравнение для угла собственного вращения представить в виде

$$\dot{\varphi}=\bar{\dot{\varphi}}(z)+\varepsilon P(y,z), \tag{8}$$

где
$$\varepsilon P(y,z)=\Phi_\varphi(y,z)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Phi_\varphi(y,z)\,dy.$$

При колебаниях и вращении по φ могут возникнуть два типа нелинейных резонансов (рис. 1): резонанс крена или «лунный» резонанс [2, 5, 6]

$$\bar{\dot{\varphi}}=\varepsilon h(z) \tag{9}$$

и вращательный резонанс [1]

$$\bar{\dot{\varphi}}\approx\omega(z). \tag{10}$$

В околорезонансной области имеют место либо прохождение через резонанс, когда соотношения (9) и (10) выполняются кратковременно, либо «захват» в резонанс (устойчивый резонанс), когда в течение дли-

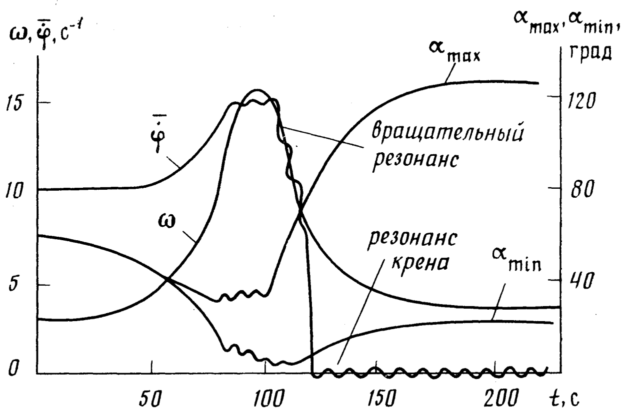

Рис. 1

тельного промежутка времени выполняются резонансные условия (9) или (10).

Если восстанавливающий момент, действующий на КА, пропорционален $\sin\alpha$, то частоты ω и $\bar{\dot{\varphi}}$ определяются соотношениями [1]:

$$\omega=\frac{\pi\sqrt{g}}{2K}\sqrt{1-\frac{2(ax-b)}{1-x^2}+\left(\frac{a-bx}{1-x^2}\right)^2},$$

$$\bar{\dot{\varphi}}=R\left(\frac{J_y-J_x}{J_x}\right)+\frac{1}{2KA}\left[(R-G)n_1\Pi_1+(R+G)n_2\Pi_2\right],$$

где $g=-(\partial M_\alpha/\partial\alpha|_{\alpha=0})/J_y$, $A=\cos\alpha_{\min}-x$, $a=(R^2+G^2)/4g$, $b=RG/2g$, $K=K(k)$, $\Pi_1=\Pi(k, n_1)$, $\Pi_2=\Pi(k, n_2)$ — полные эллиптические интегралы I и III рода.

2. Рассмотрим околорезонансную область

$$m\omega(z)-\bar{\dot{\varphi}}(z)=O(\varepsilon), \tag{11}$$

где m — целые малые простые числа, причем $m=0$ соответствует резонансу крена, $m=1$ — вращательному резонансу.

Учитывая соотношения (8) и включив амплитуду x в вектор медленных переменных z, запишем (3) в виде стандартной системы с двумя вращающимися фазами:

$$\dot{z}=\varepsilon\Phi_z(y,\ \varphi,\ z),\ \dot{y}=\omega(z)+\varepsilon Y(y,\ \varphi,\ z),\ \dot{\varphi}=\bar{\dot{\varphi}}+\varepsilon P(y,\ z), \tag{12}$$

где $z=\{x,\ R,\ G,\ q, \ldots\}$. Правые части системы (12) являются 2π-периодическими функциями быстрых переменных y и φ.

Применим общепринятую процедуру [7] построения осредненной системы в околорезонансной области (11). В системе (12) сделаем замену переменных

$$\varkappa=my-\varphi.$$

В результате получим систему с одной быстрой переменной
$\dot{z}=\varepsilon\Phi_z(y, \varkappa, z)$, $\dot{\varkappa}=\Delta\omega(z)+\varepsilon(mY(y, \varkappa, z)-P(y, z))$, $\dot{y}=\omega(z)+\varepsilon Y(y, \varkappa, z)$,
где $\Delta\omega(z)=m\omega(z)-\bar{\varphi}(z)$ — резонансная расстройка.

Теперь произведем усреднение по единственной быстрой переменной y:

$$\dot{\varkappa}=\Delta\omega(z)+\varepsilon\bar{Y}(\varkappa, z), \; \dot{z}=\varepsilon\bar{\Phi}_z(\varkappa, z), \tag{13}$$

где $\bar{Y}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Y(y,\varkappa,z)\,dy, \qquad \bar{\Phi}_z=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Phi_z(y,\varkappa,z)\,dy.$

В силу исходных уравнений [2, 3] $\bar{Y}$ и $\bar{\Phi}_z$ являются 2π-периодическими функциями переменной $\varkappa$. «Захват» в резонанс или устойчивый резонанс характеризуется тем, что расстройка частоты $\Delta\omega$ и сдвиг фаз $\varkappa$ квазипериодически меняются во времени. Для изучения устойчивости резонанса воспользуемся методом фазовой плоскости. Продифференцируем по времени первое уравнение

$$\ddot{\varkappa}=\varepsilon\left(m\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)\bar{\Phi}_z+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\bar{Y}}{\partial\varkappa}\bar{Y}+\frac{\partial\bar{Y}}{\partial z}\bar{\Phi}_z\right)+\varepsilon\Delta\omega\frac{\partial\bar{Y}}{\partial\varkappa}. \tag{14}$$

В околорезонансной области (11) последнее слагаемое в выражении (14) имеет порядок ε^2. Оставляя в этом выражении члены первого порядка малости по ε и добавляя к нему уравнения для вектора z, запишем осредненную систему в виде

$$\ddot{\varkappa}=\varepsilon\left(m\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)\bar{\Phi}_z, \qquad \dot{z}=\varepsilon\bar{\Phi}_z. \tag{15}$$

В системе (15) перейдем к новой независимой переменной — «медленному» времени $\tau=\sqrt{\varepsilon}t$ и представим систему (15) следующим образом:

$$\frac{d^2\varkappa}{d\tau^2}=\left(m\frac{\partial\omega}{\partial z}-\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)\bar{\Phi}_z=Q(\varkappa, z), \qquad \frac{dz}{d\tau}=\sqrt{\varepsilon}\,\bar{\Phi}_z. \tag{16}$$

При $\varepsilon=0$ система (16) сводится к одному уравнению невозмущенного движения

$$\frac{d^2\varkappa}{d\tau^2}=Q(\varkappa), \tag{17}$$

где $Q(\varkappa)$—2π-периодическая функция $\varkappa$.

Уравнение (17) допускает первый интеграл (интеграл энергии)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varkappa}{d\tau}\right)^2+\Pi(\varkappa)=E, \qquad \text{где} \qquad \Pi(\varkappa)=-\int Q(\varkappa)\,d\varkappa.$$

В силу периодичности функции $Q(\varkappa)$ уравнение (17) имеет четное число положений равновесия на периоде 2π:

$$Q(\varkappa^*)=0. \tag{18}$$

Действительные корни этого уравнения существуют, если

$$\max_{\varkappa} Q \min_{\varkappa} Q\leqslant 0. \tag{19}$$

Кривая энергетического баланса $\Pi(\varkappa)$ на периоде 2π имеет по крайней мере один максимум и один минимум, которым соответствуют точки неустойчивого $\varkappa=\varkappa_2^*$ и устойчивого $\varkappa=\varkappa_1^*$ равновесия (рис. 2). Фазовые траектории представляют собой замкнутые кривые в окрестности устойчивой стационарной точки $\varkappa=\varkappa_1^*$. Следовательно, уравнение (17) имеет периодические решения в случае, когда запас полной энергии удовлетво-

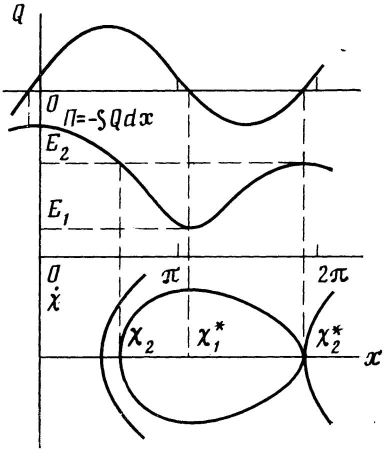

Рис. 2

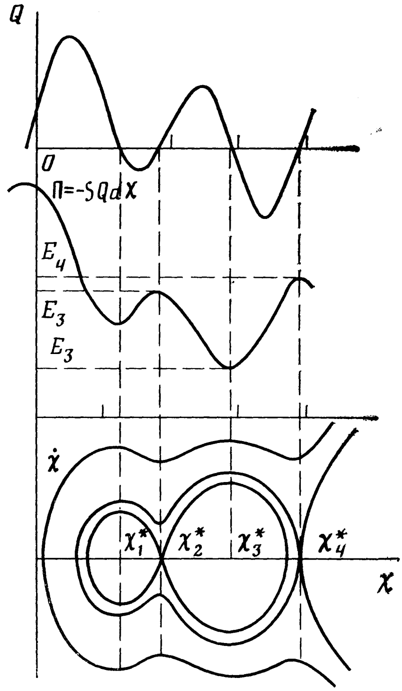

Рис. 3

ряет условию $E_2 \leqslant E \leqslant E_1$. Это в свою очередь возможно, если сдвиг фаз $\varkappa = my - \varphi$ в момент наступления резонанса (11) будет принадлежать отрезку (рис. 2)

$$\varkappa_2 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_2^*. \tag{20}$$

Соотношения (19) и (20) можно трактовать соответственно как необходимые и достаточные условия устойчивого резонанса.

Вид функции

$$Q(\varkappa, z) = \left(m\frac{\partial\omega}{\partial z} - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)\bar{\Phi}_z \tag{21}$$

зависит от вида правых частей уравнений (3). После замены $\varphi = my - \varkappa$ осреднение правых частей (4) по y дает

$$\bar{\Phi}_z = \bar{K}_0^z + \bar{K}_1^z \sin\varkappa + \bar{K}_2^z \cos\varkappa + \bar{K}_3^z \sin 2\varkappa, \tag{22}$$

где $\bar{K}_0^z = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} K_0^z\,dy, \quad \bar{K}_1^z = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} (-K_1^z \cos my + L_2^z \sin my)\,dy,$

$$\bar{K}_2^z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (K_2^z \cos my + L_1^z \sin my)\,dy,$$

$$\bar{K}_3^z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-K_3^z \cos my + L_3^z \sin my)\,dy.$$

Таким образом, сопоставляя соотношения (21) и (22), запишем функцию Q, определяющую поведение аппарата в околорезонансной области, Положения равновесия и кривая энергетического баланса в околорезонансной области определяются формулами

$$\varkappa_{1,2}^{*}=\arcsin(-Q_0/Q_1),\quad \Pi(\varkappa)=-Q_0\varkappa+Q_1\cos\varkappa.$$

В точке устойчивого равновесия

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial\varkappa}\right|_{\varkappa=\varkappa_1^*}<0.$$

Условия «захвата» в резонанс (19) запишутся в виде

$$\left|\bar{z}_{\text{т}}\bar{N}\left(\frac{2}{\bar{J}_x}-1-\frac{R}{\sqrt{R^2+4g}}\right)\right|\geqslant-\frac{m^{\alpha}S}{\sqrt{R^2+4g}}\,|\dot{q}|. \tag{26}$$

Отсюда получим выражения для критического значения асимметрии

$$\bar{z}_{\text{т}}^{*}=-\frac{m^{\alpha}S|\dot{q}|}{\bar{N}[(2/\bar{J}_x-1)\sqrt{R^2+4g}-R]}.$$

Можно показать, что соотношение (26) совпадает с условием устойчивости резонанса крена, полученного в [6].

В заключение следует сделать два замечания.

Во-первых, аналитические соотношения, подобные (26), можно получить лишь в отдельных простых случаях. В общем нелинейном случае предложенный алгоритм может быть реализован только численно. Во-вторых, соотношения для вращательного резонанса были получены при допущении, что КА совершает движение, близкое к равномерному вращению (см. (8)). Однако многочисленные расчеты показали, что предложенный алгоритм сохраняет работоспособность и при невыполнении условия (8), а также на переходных режимах — переход вращения в колебания и наоборот.

Автор выражает благодарность Ю. А. Садову за полезное обсуждение работы и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асланов В. С., Бойко В. В.* Нелинейное резонансное движение асимметричного космического аппарата в атмосфере // Космич. исслед. 1985. Т. 23. № 3. С. 408–415.
2. *Ярошевский В. А.* Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978.
3. *Асланов В. С.* Определение амплитуды пространственных колебаний баллистического аппарата с малой асимметрией при спуске в атмосфере // Космич. исслед. 1980. Т. 18. № 2. С. 178–184.
4. *Волосов В. М.* Некоторые виды расчетов в теории нелинейных колебаний, связанные с усреднением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 1. С. 3–54.
5. *Шилов А. А., Гоман М. Г.* Резонансные режимы пространственного неуправляемого движения аппаратов на участке входа в атмосферу // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1624.
6. *Вон Г.* Граничные условия устойчивого резонанса по крену на летательных аппаратах, входящих в плотные слои атмосферы // Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6. № 6. С. 47–54.
7. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию
27.I.1986