КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Т. XVIII 1980 Вып. 2

В. С. Асланов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО АППАРАТА С МАЛОЙ АСИММЕТРИЕЙ ПРИ СПУСКЕ В АТМОСФЕРЕ

Рассматривается пространственное неуправляемое движение относительно центра масс КА с малой динамической и геометрической асимметрией при спуске в атмосфере. Уравнения движения КА вокруг центра масс приведены к форме, удобной для решения методом усреднения. Получены приближенное аналитическое решение уравнения пространственного невозмущенного движения, а также осредненные уравнения возмущенного движения, применение которых позволяет без введения ограничений на величину пространственного угла атаки и начальную угловую скорость в ~ 3 раза сократить затраты машинного времени по сравнению с численным интегрированием полных уравнений движения.

В [1—3] изложены методы определения вращательного движения осесимметричных аппаратов. В линейной постановке при наличии малой асимметрии задача о пространственных колебаниях спускаемого аппарата была рассмотрена в работах [4, 5]. В [6] подобная задача решена при допущении, что КА закручен относительно продольной оси и имеет сферическую форму.

Рассматривается пространственное возмущение вращения КА при наличии малой асимметрии при спуске в атмосфере планеты. На компоненты начальной угловой скорости и на величину пространственного угла атаки ограничения не накладываются. Получены осредненные уравнения, применение которых позволяет моделировать все возможные типы движения около центра масс КА с малой асимметрией. При этом обеспечивается выигрыш в затратах машинного времени в ~ 3 раза по сравнению с численным интегрированием исходных уравнений.

1. Введем связанную барицентрическую систему координат $OXYZ$, расположенную таким образом, что центробежный момент инерции $I_{yz}=0$, а ось OX направим параллельно оси симметрии формы аппарата. Связь между скоростной системой координат $Ox_\text{а}y_\text{а}z_\text{а}$ осуществляется при помощи углов Эйлера: α — пространственный угол атаки (угол нутации), φ — угол собственного вращения, ψ — угол прецессии.

Уравнения вращательного аппарата имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&I_x\dot\omega_x-I_{xy}\dot\omega_y-I_{xz}\dot\omega_z=M_x-(I_z-I_y)\,\omega_y\omega_z-\omega_x(I_{xy}\omega_z-I_{xz}\omega_y),\\
&-I_{xy}\dot\omega_x+I_y\dot\omega_y=M_y-(I_x-I_z)\,\omega_x\omega_z-I_{xz}(\omega_x^2-\omega_z^2)+I_{xy}\omega_y\omega_z,\qquad(1)\\
&-I_{xz}\dot\omega_x+I_z\dot\omega_z=M_y-(I_y-I_x)\,\omega_x\omega_y+I_{xy}(\omega_x^2-\omega_y^2)+I_{xz}\omega_y\omega_z,
\end{aligned}
$$

где M_x, M_y, M_z — проекции суммарного аэродинамического момента на оси системы $OXYZ$; ω_x, ω_y, ω_z — проекции угловой скорости на те же оси; I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz} — главные центральные и центробежные моменты инерции.

Кинематические уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\omega_x&=\dot\psi\cos\alpha+\dot\varphi,\\ \omega_y&=\dot\psi\sin\alpha\sin\varphi+(\dot\alpha+\lambda)\cos\varphi,\\ \omega_z&=\dot\psi\sin\alpha\cos\varphi-(\dot\alpha+\lambda)\sin\varphi,\end{aligned}\tag{2}$$

где $\lambda=Y/mV$, Y — подъемная сила, m — масса аппарата, V — скорость полета.

Малую весовую и аэродинамическую асимметрию будем определять параметрами: $\Delta_i=(I_z-I_y)/I$; $\bar I_{xy}=I_{xy}/I_y$, $\bar I_{xz}=I_{xz}/I_y$ — безразмерные центробежные моменты инерции; $(\bar y_т{}^2+\bar z_т{}^2)^{1/2}$ — относительное смещение центра масс КА от его оси симметрии; m_{x0}, m_{y0}, m_{z0} — коэффициенты возмущающего аэродинамического момента $M_0=\{M_{x0}, M_{y0}, M_{z0}\}$, возникающего, например, при наличии отклонений поверхности аппарата от номинальной формы в сочетании с поперечным смещением центра масс от оси симметрии [4]. Припишем малой асимметрии и демпфирующему моменту $M^д$ порядок малости ε.

Уравнения движения центра масс КА запишем в виде

$$\dot V=-c_x(\bar\alpha)\frac{qS}{m}-g_т\sin\theta,\tag{3}$$

$$\dot\theta=-\frac{g_т\cos\theta}{V}\left(1-\frac{V^2}{g_тR_p}\right),\quad \dot H=V\sin\theta.$$

Здесь θ, H — соответственно угол наклона траектории к горизонту и высота, $g_т$ — ускорение силы тяжести, $R_р$ — расстояние до притягивающего центра, c_x — коэффициент сопротивления, q — скоростной напор, S — площадь миделевого сечения, $\bar\alpha$ — среднее за период колебания значение угла атаки.

На промежутке времени, периоду полного оборота продольной оси аппарата по конусу прецессии, значение коэффициента $c_y(\alpha)$ в среднем обращается в нуль, а $c_x(\alpha)=c_x(\bar\alpha)$. Поэтому для баллистического аппарата подъемная сила Y не входит в уравнения движения центра масс. Сила Y оказывает влияние на движение аппарата вокруг центра масс. Данный способ впервые был применен В. А. Ярошевским и в настоящее время общепринят.

Будем считать, что траекторные параметры V, θ и H изменяются медленно, и приписывать правым частям уравнений (3) параметр малости ε.

Разделим возмущенное вращательное движение аппарата на «быстрое» и «медленное». С помощью замены переменных

$$\begin{gathered}R=I_x\omega_x/I_y,\quad \dot\alpha=\omega_y\cos\varphi-\omega_z\sin\varphi,\\ G=R\cos\alpha+(\omega_y\sin\varphi+\omega_z\cos\varphi)\sin\alpha,\end{gathered}\tag{4}$$

пренебрегая величинами порядка ε^2 и выше, приведем исходные уравнения систем (1) и (2) к одному уравнению, описывающему «быстрое» квазипериодическое движение угла атаки α, и уравнениям для медленно меняющихся параметров:

$$\begin{gathered}\ddot\alpha+\frac{(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}-M_{\alpha p}(\alpha,z)=\Delta_i(F_\alpha+M_{\alpha p}\sin^2\varphi)+\\ +M_{\alpha\tau}+M_\alpha{}^д+M_{\alpha0}+K_\alpha=\varepsilon\Phi_\alpha(\alpha,\dot\alpha,\varphi,z),\\ \dot R=\Delta_iF_R+M_{RN}+M_R{}^д+M_{R0}+K_R=\varepsilon\Phi_R(\alpha,\dot\alpha,\varphi,z),\\ \dot G=\Delta_iF_G+M_{GN}+M_{G\tau}+M_G{}^д+M_{G0}+K_G+\lambda h_1=\varepsilon\Phi_G(\alpha,\dot\alpha,\varphi,z),\\ \dot\varphi=\frac{R}{\bar I_x}-\frac{(G-R\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\quad \dot\psi=\frac{G-R\cos\alpha}{\sin^2\alpha},\end{gathered}\tag{5}$$

где $M_{\alpha p}=(M_p-x_т N)/I_y$ — восстанавливающий момент, N — нормальная сила, M_p — продольный аэродинамический момент, вычисленный относительно передней кромки КА; $x_т$ — смещение центра масс от передней кромки;

$$M_{\alpha\tau}=\tau(z_т\cos\varphi+y_т\sin\varphi)/I_y,\quad M_{G\tau}=\tau(z_т\sin\varphi-y_т\cos\varphi)\sin\alpha/I_y,$$

$$M_{RN}=N(y_т\cos\varphi-z_т\sin\varphi)/I_y,\ M_{GN}=N(y_т\cos\varphi-z_т\sin\varphi)\cos\alpha/I_y,$$

$$M_\alpha^\partial=(M_y^\partial\cos\varphi-M_z^\partial\sin\varphi)/I_y+Y^\alpha\cdot\dot\alpha/(mV),\ M_R^\partial=M_x^\partial/I_y,$$

$$M_G^\partial=[M_x^\partial\cos\alpha+(M_y^\partial\sin\varphi+M_z^\partial\cos\varphi)\sin\alpha]/I_y,$$

$$M_{\alpha 0}=(M_{y0}\cos\varphi-M_{z0}\sin\varphi)/I_y,$$

$$M_{R0}=M_{x0}/I_y,\ M_{G0}=[M_{x0}\cos\alpha+(M_{y0}\sin\varphi+M_{z0}\cos\varphi)\sin\alpha]/I_y,$$

$$K_\alpha=\bar I_{xy}(\omega_y h-\omega_x^2\sin\varphi)+\bar I_{xz}(\omega_z h-\omega_x^2\cos\varphi),\ K_R=\bar I_{xy}(M_{\alpha p}\cos\varphi-R\omega_z)-$$
$$-I_{xy}(M_{\alpha p}\sin\varphi-R\omega_y),\ K_G=K_R\cos\alpha+[\bar I_{xy}(\omega_x^2\cos\varphi-$$
$$-\dot\alpha\omega_y)-\bar I_{xz}(\omega_x^2\sin\varphi+\dot\alpha\omega_z)]\sin\alpha,$$

$$F_\alpha=[h(\bar I_x\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi-1)+(\bar I_x-2)\dot\alpha\sin\varphi\cos\varphi]R/I_x;$$

$$F_R=0{,}5(\dot\alpha^2-h^2)\sin 2\varphi-\dot\alpha h\cos 2\varphi,\quad F_G=-\dot\alpha R\sin\alpha\cos^2\varphi-$$
$$-0{,}5(hh_1-M_{\alpha p}\sin\alpha-\dot\alpha^2\cos\alpha)\sin 2\varphi+\dot\varphi\sin\alpha(h\sin 2\varphi+\dot\alpha\cos 2\varphi).$$

Здесь $h=(G-R\cos\alpha)/\sin\alpha$, $h_1=(R-G\cos\alpha)/\sin\alpha$, $\bar I_x=I_x/I_y$, $\omega_x=R/\bar I_x$, $\omega_y=h\sin\varphi+\dot\alpha\cos\varphi$, $\omega_z=h\cos\varphi-\dot\alpha\sin\varphi$, $z=\{R, G, V, \theta, H,\dots\}$ — вектор медленно меняющихся функций.

Таким образом, полные уравнения возмущенного движения (1) — (3) КА с малой асимметрией можно записать в следующем виде:

$$\ddot\alpha+F(\alpha, z)=\varepsilon\Phi_\alpha(\alpha, \dot\alpha, \varphi, z),$$
$$\dot z=\varepsilon\Phi_z(\alpha, \dot\alpha, \varphi, z),\ \dot\varphi=\Phi_\varphi(\alpha, z). \tag{6}$$

Данные уравнения описывают квазиконсервативное движение колебательной системы с одной степенью свободы.

2. Невозмущенным будем называть такое движение, которое имеет место при $\varepsilon=0$. Система (5) сводится к одному уравнению

$$\ddot\alpha+\frac{(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}-M_{\alpha p}(\alpha)=0. \tag{7}$$

При известном решении этого уравнения последние два кинематических уравнения из (5) интегрируются в квадратурах.

Рассмотрим невозмущенное движение КА малого удлинения. Приведенные коэффициенты продольного момента и нормальной силы ($\bar m_p=m_p/\sin\alpha$, $\bar c_N=c_N/\sin\alpha$) представим в виде

$$m_p=\sum_{i=0}^{n}a_{mi}\cos i\alpha,\quad \bar c_N=\sum_{i=0}^{n}a_{ni}\cos i\alpha. \tag{8}$$

Пусть выполняются условия

$$|a_{mi}/a_{m0}|=0(\varepsilon),\ |a_{ni}/a_{n0}|=0(\varepsilon)\ \ (i=1, 2,\dots, n). \tag{9}$$

Перепишем уравнение (7) с учетом соотношений (8) в виде

$$\ddot\alpha+\frac{(G-R\cos\alpha)(R-G\cos\alpha)}{\sin^3\alpha}+g_0\sin\alpha=-\sin\alpha\sum_{i=1}^{n}g_i\cos i\alpha, \tag{10}$$

где $g_i=-(a_{mi}-\bar x_T a_{ni})qSl/J_y$, $g_0>0$, l — характерный размер КА

Приближенное решение уравнения (10) можно найти методом Ван дер Поля, в качестве порождающего решения выбрав решение для сферы ($a_{mi}=a_{ni}=0$, $i=1, 2, \dots, n$) [3]:

$$\cos\alpha=A\,\mathrm{cn}^2\left[K\left(\frac{2y}{\pi}+1\right),\ k\right]+x, \qquad (11)$$

где $x=\cos\alpha_{\max}$, $y=\omega(t-t_0)$, $\omega=\pi\beta/2K$, $\beta=\sqrt{g_0\eta}$, $k=\sqrt{A/2\eta}$, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл I рода,

$$\eta=\sqrt{1-2(ax-b)/(1-x^2)+[(a-bx)/(1-x^2)]^2},$$

$$A=\eta-x-(a-bx)/(1-x^2), \qquad a=(R^2+G^2)/4g_0, \qquad b=RG/2g_0.$$

Решение уравнения (10) будем искать в виде (11), рассматривая x и y как функции «медленного» времени. Запишем уравнения Ван дер Поля в виде

$$\dot{x}=\frac{1}{2\pi\Delta}\int\limits_0^{2\pi}\alpha_y\sin\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}g_i\cos i\alpha\right)dy, \qquad (12)$$

$$\dot{y}=\omega-\frac{1}{2\pi\Delta}\int\limits_0^{2\pi}\alpha_x\sin\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}g_i\cos i\alpha\right)dy, \qquad (13)$$

где $\Delta(x)=(\alpha_x\alpha_{yy}-\alpha_y\alpha_{xy})\,\omega-\omega_x\alpha_y{}^2=4KAk'^2\beta/\pi(1-x^2)$.

Подынтегральная функция в уравнении (12), если поставить в нее решение (11), является нечетной периодической функцией переменной y, поэтому интеграл от нее равен нулю.

При вычислении определенного интеграла в уравнении (13) воспользуемся упрощенной формулой решения (11):

$$\cos\alpha=B(1-\cos\xi)(m-\cos\xi)^2+x, \qquad (14)$$

где $B=Ap^2/2$, $m=(2-p)/p$, $p=2(1-\sqrt{k'})/(1+\sqrt{k'})$, $\xi=2y$, $k'=\sqrt{1-k^2}$.

Точность данной аппроксимации уменьшается с увеличением модуля k. Например, при $k^2=0{,}5$ абсолютная погрешность не превышает 0,0005, а при $k^2=0{,}9$ погрешность меньше 0,03. Для плоского случая движения, при котором $k^2=(1-x)/2$ имеет максимальное значение, легко оценить углы атаки, соответствующие указанным значениям модуля. В первом случае $\alpha_{\max}=90°$, а во втором $\alpha_{\max}=143°$.

Производная α_x в уравнении (13) определяется формулой

$$\alpha_x=-\frac{1}{\sin\alpha}\sum_{v=0}^{3}d_v\cos^v\xi, \qquad (15)$$

где $d_0=\sum\limits_{j=0}^{3}2^{-j}l_j$, $\quad d_1=\sum\limits_{j=0}^{3}2^{-j}jl_j$, $\quad d_2=l_2/4-3l_3/8$, $\quad d_3=l_3/8$,

$$l_0=1+A_x, \quad l_1=-(2A_xp+2Ap_x+A_x),$$

$$l_2=A_xp^2+2App_x+2A_xp+2Ap_x, \qquad l_3=-(A_xp^2+2App_x).$$

Производные A_x и p_x можно получить путем дифференцирования соответствующих выражений из (11) и (14).

Заменим тригонометрический полином в (13) степенным многочленом $\sum\limits_{i=1}^{n}g_i\cos i\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\cos^i\alpha$ и подставим в это уравнение решение (14). В результате получим

$$\dot{y}=\omega+\frac{\delta_n}{\Delta},\quad \delta_n=\sum_{i=1}^{n} I_i. \tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_i&=\frac{c_i}{4\pi}\int [B(1-\cos\xi)(m-\cos\xi)^2+x]^i\sum_{v=0}^{3} d_v\cos^v\xi d\xi= \\ &=c_i\sum_{j=0}^{[3(i+1)/2]} k_{2j}\sum_{v=2j-3i}^{3} d_v b_{i,2j-v}, \end{aligned} \tag{17}$$

где $[\ldots]$ означает целую часть цикла, $k_{2j}=(2j-1)!!/(2j)!!$, $k_0=1$;

$$b_{ij}=(-1)^j\sum_{q=[(j+2)/3]}^{i} c_i^q x^{i-q}B^q\sum_{k=j-2q}^{q} c_q^k c_{2q}^{j-k}\, m^{2q-j+k}, \tag{18}$$

c_j^i — биномиальный коэффициент.

Интегрируя уравнение (16), получим

$$y=\omega_1(t-t_0),\qquad \omega_1=\omega(1+\delta_n/\omega\Delta), \tag{19}$$

где

$$\delta_n=\sum_{i=1}^{n} c_i\sum_{j=0}^{[3(i+1)/2]} k_{2j}\sum_{v=2j-3i}^{3} d_v b_{i,2j-v}. \tag{20}$$

Таким образом, невозмущенное пространственное движение осесимметричного аппарата малого удлинения в атмосфере отличается от невозмущенного движения сферы частотой колебания угла атаки. Приближенное решение уравнения (10) имеет вид

$$\cos\alpha=A\,\mathrm{cn}^2\,[\beta_1(t-t_0)+K,\ k]+x, \tag{21}$$

где

$$\beta_1=\beta(1+\delta_n/\omega\Delta).$$

Результаты численных расчетов показали, что для тел малого удлинения, для которых $\max|a_{ji}|/|a_{j0}|<0{,}3$ $(j=m,\ n,\ i=1,\ldots,\ n)$, погрешность приближенного решения (21) не превышает 2%. Весьма существенно то, что точность решения (21) мало зависит от величины скоростного напора q.

3. В общем случае уравнения возмущенного движения КА с малой асимметрией помимо α содержат еще и угол собственного вращения φ. Поэтому при известном порождающем решении (21) необходимо определить следующую функцию:

$$\varphi(t)-\varphi_0=\int_{t_0}^{t}\left[\frac{R}{I_x}-\frac{(G-R\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]dt. \tag{22}$$

Если подставить решение (21) в подынтегральную функцию, то интеграл (22) можно выразить через неполные и полные эллиптические интегралы III рода и представить следующим образом:

$$\varphi-\varphi_0=R\left(\frac{I_x-I_y}{I_x}\right)(t-t_0)+\frac{1}{2A\beta_1}[n_1(\tilde{\Pi}_1-\Pi)(R-G)-n_2(\tilde{\Pi}_2-\Pi_2)(R+G)]. \tag{23}$$

где $\tilde{\Pi}_1=\Pi(\psi,\ n_1,\ k)$, $\tilde{\Pi}_2=\Pi(\psi,\ n_2,\ k)$, $\Pi_1=\Pi(n_1,\ k)$, $\Pi_2=\Pi(n_2,\ k)$, $n_1=A/(1-A-x)$, $n_2=-A/(1+A+x)$, $\psi=\mathrm{am}[\beta_1(t-t_0)+K,\ k]$.

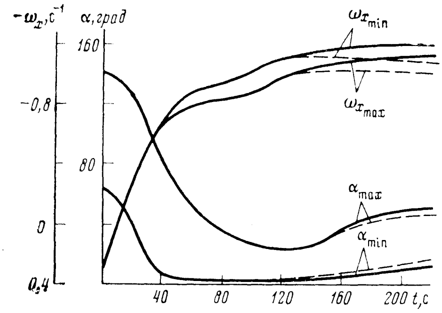

Рис. 1. Зависимость углов атаки и угловой скорости от времени спуска для нерезонансного случая

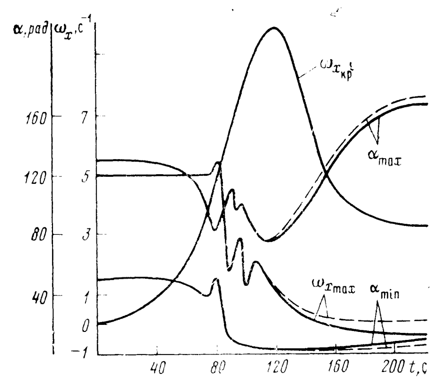

Рис. 2. Зависимость углов атаки и угловой скорости для резонансного случая

Для квазиконсервативной системы (5), выбрав в качестве «медленной» переменной амплитуду колебания $x=\cos\alpha_{\max}$, представим осредненные уравнения в форме [7]

$$\begin{gathered}
\dot{x}=-\frac{\varepsilon\sqrt{1-x^2}}{F(x,z)}\left\{\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T}\left[\Phi_\alpha(\alpha,\dot{\alpha},\varphi,z)\,\dot{\alpha}+\frac{\partial W(u,z)}{\partial R}\,\Phi_R(\alpha,\dot{\alpha},\varphi,z)+\right.\right.\\
\left.+\frac{\partial W(u,z)}{\partial G}\,\Phi_G(\alpha,\dot{\alpha},\varphi,z)+\frac{\partial W(u,z)}{\partial q}\,\Phi_q(z)\right]dt-\\
\left.-\frac{\partial W(x,z)}{\partial R}\,\overline{\Phi}_R(z)-\frac{\partial W(x,z)}{\partial G}\,\overline{\Phi}_G(z)-\frac{\partial W(x,z)}{\partial q}\,\Phi_q(z)\right\},
\end{gathered} \qquad (24)$$

$$\dot{R}=\frac{\varepsilon}{T}\int\limits_t^{t+T}\Phi_R(\alpha,\dot{\alpha},\varphi,z)\,dt=\varepsilon\overline{\Phi}_R(z),\qquad \dot{G}=\frac{\varepsilon}{T}\int\limits_t^{t+T}\Phi_G(\alpha,\dot{\alpha},\varphi,z)\,dt=\varepsilon\overline{\Phi}_G(z),$$

где $u=\cos\alpha$, $T=2K/\beta_1$ — период колебания угла атаки,

$$\Phi_q(z)=\rho V\dot{V}+\frac{V^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial H}\dot{H},\qquad \bar{c}_i=c_i/q\qquad (i=0,1,\ldots,n),$$

$$W(u,z)=\frac{R^2+G^2-2RGu}{2(1-u^2)}-q\sum_{i=0}^{n}\frac{\bar{c}_i}{i+1}u^{i+1},$$

$$F(x,z)=\frac{(G-Rx)(R-Gx)}{(1-x^2)^{3/2}}+q\sqrt{1-x^2}\sum_{i=0}^{n}\bar{c}_i x^i.$$

Минимальный угол атаки определяется из решения (11) по формуле $\cos\alpha_{\min}=A+x$.

Функция (23), входящая в подынтегральные выражения уравнений (24), зависит от неполных эллиптических интегралов III рода $\Pi(\psi, n, k)$, которые вычисляются по громоздким рекуррентным соотношениям. Предлагается на каждом шаге интегрирования вычислять функцию $\varphi(t)$ по экономичной схеме, основанной на методе Симпсона.

Шаг интегрирования осредненных уравнений (24) связан с величиной периода колебания T. Для обеспечения непрерывности вычисления функции $\varphi(t)$ при интегрировании методом Рунге — Кутта 4-го порядка шаг выбирается равным удвоенному периоду колебаний. В связи с этим расчет движения КА вокруг центра масс осуществляется комбинированным способом: при $T>h^*/2$, где h^* — наибольшая предельная величина шага интегрирования, расчет ведется по исходным уравнениям (5); при $T\leqslant h^*/2$ — по уравнениям (24). Осредненные уравнения движения применимы на участках высокочастотных колебаний, которые являются наиболее трудоемкими в вычислительном смысле.

Как видно из рис. 1 и 2, расчеты по осредненным уравнениям дают удовлетворительное совпадение с результатами численного интегрирования исходных уравнений (сплошная линия).

Применение комбинированного метода, основанного на совместном использовании результатов численного интегрирования исходных и осредненных уравнений, позволяет в $\sim$3 раза снизить затраты машинного времени счета по сравнению с численным интегрированием только исходных уравнений.

Характер изменения функций Φ_R и Φ_G весьма близок. Кроме того, эти функции входят линейно в подынтегральную функцию первого уравнения. Более значительный выигрыш во времени счета получается, если вычисления всех определенных интегралов уравнения (24) проводятся одновременно в одних и тех же точках отрезка $[t, t+T]$.

Дата поступления
22 марта 1978 г.

Литература

1. *Г. Е. Кузмак.* Динамика неуправляемого движения летательных аппаратов при входе в атмосферу. М., «Наука», 1970.
2. *В. В. Воейков, В. А. Ярошевский.* Уч. зап. ЦАГИ, *1*, № 3, 45, 1970.
3. *В. С. Асланов.* Космич. исслед., *14*, № 4, 491, 1976.
4. *В. А. Ярошевский.* Тр. ЦАГИ, вып. 1322, 1971.
5. *А. А. Шилов, А. Ф. Васильев.* Тр. ЦАГИ, вып. 1345, 1971.
6. *В. А. Гробов, А. В. Коцюба.* Прикладная механика, *8*, № 12, 71, 1972.
7. *В. М. Волосов.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ., *3*, № 1, 3, 1963.